157. 独立確率変数の収斂

北大、あつち まさひこ　　1949. 2. 18

以下に取扱う（実）確率変数 $x_1, x_2, \cdots\cdots$ は凡て互に独立で

$$P(|x_i| \leqq K) = 1 \quad i = 1, 2, \cdots\cdots$$

且つ一般性を失うことなく各々の平均値は 0 としておく．

〔定理 1〕　確率変数 $x_1, x_2, \cdots\cdots$ に於て

$$E_i = E(x_i \geqq \delta), \qquad \delta > 0$$

とすれば

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = 0.$$

〔証明〕　$P(\bigcap E_i) > 0$　と仮定する

$$P(\bigcap E_i) = \pi P(E_i)$$

従って任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$P(E_i) > 1 - \varepsilon, \quad i > N$$

$$\begin{aligned}
m(x_i) &= \int x_i P(d\omega) \\
&= \int_{E_i} x_i P(d\omega) + \int_{\Omega - E_i} x_i P(d\omega) \\
&\geqq \delta . P(E_i) - K\ P(\Omega - E_i) \\
&\geqq \delta(1 - \varepsilon) - K\varepsilon \\
&= \delta - (\delta + K)\varepsilon .
\end{aligned}$$

ε は任意だったから

$$> 0 \qquad i > N.$$

と出来る．

これは $m(x_i) = 0, \ i = 1, 2, \cdots\cdots$ なる仮定に反する．

〔注意〕　上の証明と同様にすれば

$$E_i = E(x_i \leqq -\delta), \qquad \delta > 0$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = 0.$$

〔定理 1〕　$x_1, x_2, \cdots\cdots$ が xに 概収斂すれば

$$P(x=0)=1$$

〔証明〕

$$E_n' \equiv \bigcup_{p=1}^{\infty} \bigcap_{n=p}^{\infty} E\left(x_n > \frac{1}{n}\right)$$

$$E_n \equiv \left(x > \frac{1}{n}\right)$$

$$E_n'' = E_n - E_n \cap E_n'$$

$$\omega \in E_n''$$

とすれば　$x_n(\omega) \leqq \frac{1}{n}$　となる n が無数にある。

又　　$x(\omega) > \frac{1}{n}.$

従って　$x_1(\omega),\ x_2(\omega), \cdots\cdots$　は　$x(\omega)$ に収斂しない。

即ち

$$P(E'')=0$$

$$P(E_n)=P(E_n \cap E_n')$$

$$P(E_n') \geqq P(E_n \cap E_n') = P(E_n)$$

〔定理 1〕より

$$P\left\{\bigcap_{n=p}^{\infty} E\left(x_n > \frac{1}{n}\right)\right\}=0$$

$$P(E_n')=0$$

$$P(E_n)=0$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)=P(x>0)=0$$

同様に

$$P(x<0)=0$$

〔定理 3〕　　$x_1, x_2, \cdots\cdots$ が　xに確率収斂すれば概収斂して

$$P(x=0)=1$$

〔証明〕　$x_1, x_2, \cdots\cdots$ の適当な部分列は x に概収斂し

従て　〔定理2〕より

$$P(E) \equiv P(x \neq 0)=0$$

$x_1(\omega),\ x_2(\omega), \cdots\cdots$ が 0に収斂しないとすれば適当な部分列.

$\{y_i(\omega)\}$ を　$a \neq 0$　に収斂させることが出来る。

実数列 $y_1, y_2, \cdots\cdots$ の概収斂する部分列をとれば その極限は x であるが、

$$x(\omega) = a \neq 0$$

だから $\omega \in E$

$P(E) = 0$ だから $x_1, x_2, \cdots\cdots$ は 0 に概収斂する.

（定理3. は 共立社. 近代数学全書 河田敬義著. 確率論参照）